§ Outra vez a precessão do spin

Quando o spin se acopla com um campo magnético uniforme, temos o Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = -\gamma \vec{S}\cdot\vec{B} = \omega S_z ,$$

onde para o elétron, $\gamma = \frac{e}{mc}$, $\omega = \frac{|e|B}{mc}$

O operador de evolução temporal neste caso fica:

$$\mathcal{U}(t,0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t\right) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\omega t S_z\right).$$

Este operador tem a mesma forma que um operador de rotação, com ângulo $\varphi = \omega t$, e eixo de rotação $\hat{z}$.

Assim:

$$\mathcal{U}(t,0) = \mathcal{D}(\hat{z}, \varphi=\omega t),$$

e usando os resultados de um cálculo anterior temos

$$\langle S_x\rangle_t = \langle S_x\rangle_0 \cos\omega t - \langle S_y\rangle_0 \operatorname{sen}\omega t$$
$$\langle S_y\rangle_t = \langle S_y\rangle_0 \cos\omega t + \langle S_x\rangle_0 \operatorname{sen}\omega t$$
$$\langle S_z\rangle_t = \langle S_z\rangle_0$$

A média do spin, retorna à direção original depois de um tempo

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

<u>Resultado</u>: a componente na direção do campo magnético é constante. A média da componente no plano (x,y) roda com velocidade angular $\underline{\omega}$. Resultado líquido: a média do spin precessa em torno do campo magnético com velocidade angular $\omega = \frac{|e|B}{mc}$

§ Formalismo de Pauli para spin 1/2 (duas componentes)

$$S_z|+\rangle = +\frac{\hbar}{2}|+\rangle \quad , \quad S_z|-\rangle = -\frac{\hbar}{2}|-\rangle$$

kets: $\quad |+\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \chi_+ , \quad |-\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \chi_-$

bras: $\quad \langle +| \longleftrightarrow (1,0) = \chi_+^\dagger \quad , \quad \langle -| \longleftrightarrow (0,1) = \chi_-^\dagger$

Para um ket arbitrário temos:

$$|\alpha\rangle = \langle +|\alpha\rangle\, |+\rangle + \langle -|\alpha\rangle\, |-\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \langle +|\alpha\rangle \\ \langle -|\alpha\rangle \end{pmatrix} \equiv \chi = \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix}$$

$$c_+ \equiv \langle +|\alpha\rangle \quad , \quad c_- \equiv \langle -|\alpha\rangle$$

$$\chi = \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix} = c_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_+ \chi_+ + c_- \chi_-$$

$$\chi^\dagger = (c_+^*, c_-^*) = c_+^* \chi_+^\dagger + c_-^* \chi_-^\dagger$$

As matrizes das componentes do spin dão origem às chamadas matrizes de Pauli (a menos de um fator $\frac{\hbar}{2}$):

$$\langle + | S_z | + \rangle = \frac{\hbar}{2} \quad , \langle - | S_z | - \rangle = -\frac{\hbar}{2} \quad , \quad \langle + | S_z | - \rangle = 0$$

$$S_z \longleftrightarrow \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \frac{\hbar}{2} \sigma_z$$

$$\langle + | S_x | + \rangle = \langle - | S_x | - \rangle = 0$$
$$\langle + | S_x | - \rangle = \langle - | S_x | + \rangle = \frac{\hbar}{2}$$

$$S_x \longleftrightarrow \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{\hbar}{2} \sigma_x$$

$$\langle + | S_y | + \rangle = \langle - | S_y | - \rangle = 0$$
$$\langle + | S_y | - \rangle = \langle - | S_y | + \rangle^* = -i$$

$$S_y \longleftrightarrow \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{\hbar}{2} \sigma_y$$

As matrizes de Pauli $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ satisfazem a álgebra:

$$\sigma_i^2 = 1$$

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 0 \quad , \quad i \neq j \; , \quad i, j = x, y, z$$

Escreveremos estas relações como

$$\{\sigma_i , \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$$

Como elas representam momentum angular (a menos do fator $\frac{\hbar}{2}$), satisfazem também uma álgebra de comutadores

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\,\varepsilon_{ijk}\,\sigma_k \quad , \; i,j,k = x,y,z$$

Combinando as duas relações, obtemos:

$$\sigma_x\sigma_y = -\sigma_y\sigma_x = i\sigma_z$$
$$\sigma_y\sigma_z = -\sigma_z\sigma_y = i\sigma_x$$
$$\sigma_z\sigma_x = -\sigma_x\sigma_z = i\sigma_y$$

Temos também as propriedades:

$$\sigma_i^{\dagger} = \sigma_i \quad (\text{Hermiteana})$$
$$Tr\,\sigma_i = 0$$
$$\det\sigma_i = -1$$

Seja $\vec{a}$ um vetor em 3-dim : $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$. Escrevemos:

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{a} = a_x\sigma_x + a_y\sigma_y + a_z\sigma_z$$

$$= \begin{pmatrix} a_z & a_x - ia_y \\ a_x + ia_y & -a_z \end{pmatrix}$$

Se $\vec{a}$ for real, $(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})$ é uma matriz hermiteana, de Traço nulo:

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})^{\dagger} = \vec{\sigma}\cdot\vec{a} \quad , \quad Tr(\vec{\sigma}\cdot\vec{a}) = \sum_{i=x,y,z} a_i\, Tr\,\sigma_i = 0$$

$$\det(\vec{\sigma}\cdot\vec{a}) = -a_z^2 - (a_x^2 + a_y^2) = -(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) = -|\vec{a}|^2$$

Também temos:

$$(\vec{\sigma}.\vec{a})^2 = \begin{pmatrix} a_z & a_x - ia_y \\ a_x + ia_y & -a_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_z & a_x - ia_y \\ a_x + ia_y & -a_z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 & 0 \\ 0 & a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \end{pmatrix} = |\vec{a}|^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Também a identidade importante:

$$(\vec{\sigma}.\vec{a})(\vec{\sigma}.\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}),$$

Que reproduz todas as relações sobre produtos acima.

§ Rotações neste espaço:

As rotações são também matrizes de (2×2) complexas.

Escrevendo:

$$\mathcal{D}(\hat{n},\varphi) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(\vec{S}\cdot\hat{n})\varphi\right\} = \exp\left\{-i(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})\frac{\varphi}{2}\right\}$$

Lembrando as relações acima, temos:

$$(\vec{\sigma}.\hat{n})^2 = |\hat{n}|^2 = 1 \quad , \quad (\vec{\sigma}\cdot\hat{n})^3 = \vec{\sigma}.\hat{n}$$ .... e assim por diante:

$$(\vec{\sigma}.\hat{n})^{2k} = 1 \quad , \quad (\vec{\sigma}.\hat{n})^{2k+1} = (\vec{\sigma}.\hat{n}) \; ,$$

de maneira que a série da exponencial pode ser avaliada de maneira fechada:

$$\exp\left\{ i(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})\frac{\varphi}{2}\right\} = 1 - i\frac{\varphi}{2}(\vec{\sigma}\cdot\hat{n}) + \frac{1}{2!}\left(\frac{i\varphi}{2}\right)^2(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})^2 + \cdots$$

$$= \left\{1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 \cdots\right\} - i(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})\left\{\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^3 \cdots\right\}$$

$$= \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - i(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})\,\mathrm{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} - i n_z\,\mathrm{sen}\frac{\varphi}{2} & (-in_x - n_y)\,\mathrm{sen}\frac{\varphi}{2} \\ (-in_x + n_y)\,\mathrm{sen}\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} + i n_z\,\mathrm{sen}\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$$

O resultado de uma rotação pode ser escrito para um spinor arbitrário:

$$\chi \longrightarrow \exp\left\{-i(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})\frac{\varphi}{2}\right\}\chi$$

Vemos que em todas as fórmulas aparece o valor $\frac{\varphi}{2}$ para o ângulo, de maneira que o spinor só voltará a seu valor original depois de uma rotação de 4π.

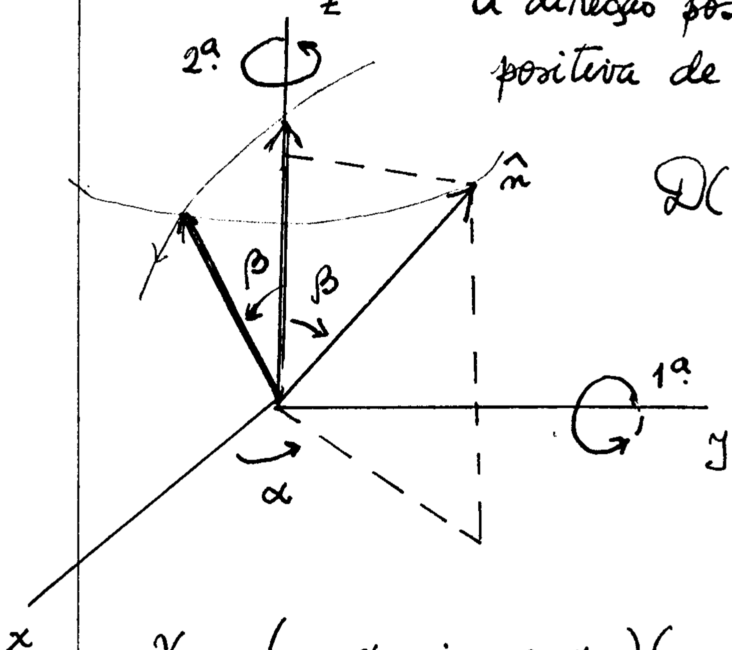
A equação de autovalores para $(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})$

$$(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})\chi = \lambda\chi$$

pode ser resolvida usando rotações. Os autovalores de qualquer componente do spin são $\pm\frac{\hbar}{2}$. Para as matrizes de Pauli, $\lambda_\pm = \pm 1$. Assumamos que queremos resolver

$$(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})\,\chi = \chi\,,$$

que corresponde ao spinor com spin "para cima". Sejam (α,β) os ângulos polares associados com a direção $\hat{n}$. Decompomos a rotação que transforma a direção positiva de $\hat{z}$ na direção positiva de $\hat{n}$, em duas rotações:



$$\mathcal{D}(\hat{z},\alpha)\ \mathcal{D}(\hat{y},\beta)$$

Assim, o spinor procurado é:

$$\chi = \left(\cos\frac{\alpha}{2} - i\sigma_z \,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\beta}{2} - i\sigma_y\,\text{sen}\frac{\beta}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \left[\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - i\sigma_y\cos\frac{\alpha}{2}\,\text{sen}\frac{\beta}{2} - i\sigma_z\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sigma_z\sigma_y\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\,\text{sen}\frac{\beta}{2}\right]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \left[\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - i\sigma_z\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + i\sigma_x\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\,\text{sen}\frac{\beta}{2} - i\sigma_y\cos\frac{\alpha}{2}\,\text{sen}\frac{\beta}{2}\right]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

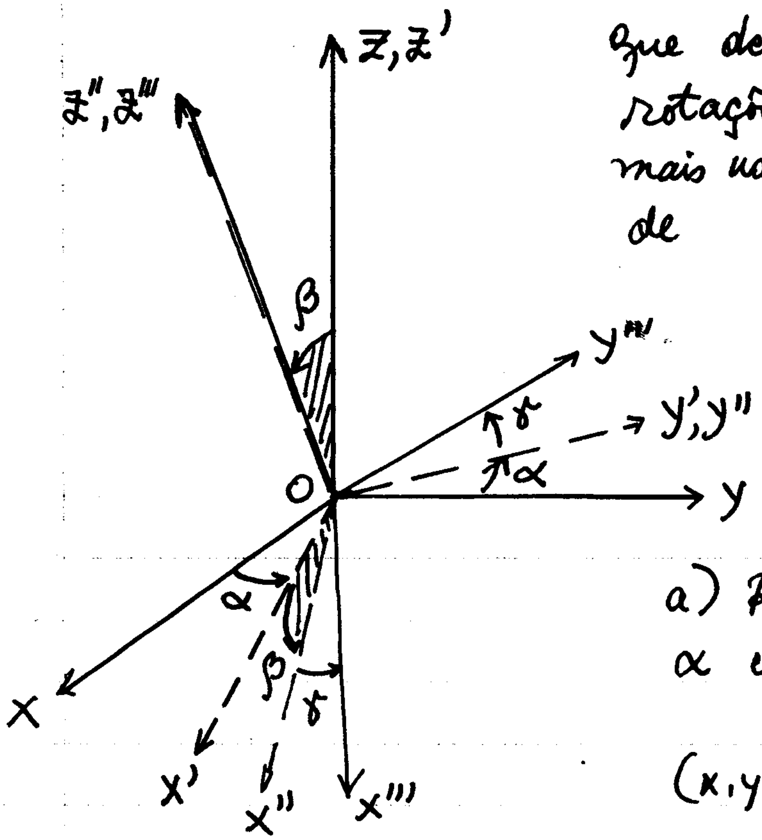
$$= \left\{ \cos\frac{\beta}{2} \left(\cos\frac{\alpha}{2} - i\,\sigma_z \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \right) + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sen}\frac{\beta}{2} \left(i\sigma_x \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} - i\sigma_y \cos\frac{\alpha}{2} \right) \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2}\, e^{-i\alpha/2} & -\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\, e^{-i\alpha/2} \\ \operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\, e^{i\alpha/2} & \cos\frac{\beta}{2}\, e^{i\alpha/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2}\, e^{-i\alpha/2} \\ \operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\, e^{i\alpha/2} \end{pmatrix}$$

§ Ângulos de Euler (α, β, γ)



São três ângulos (parâmetros) que descrevem o grupo de rotações. Usaremos a convenção mais usada em Física, chamada de (ZYZ). Uma rotação arbitrária é obtida por três rotações elementares em sequência:

a) Rotação $R_z(\alpha)$ em ângulo α com eixo OZ:

$$(x, y, z) \xrightarrow{R_z(\alpha)} (x', y', z');$$

b) Rotação $R_{y'}(\beta)$ em ângulo β com eixo OY':

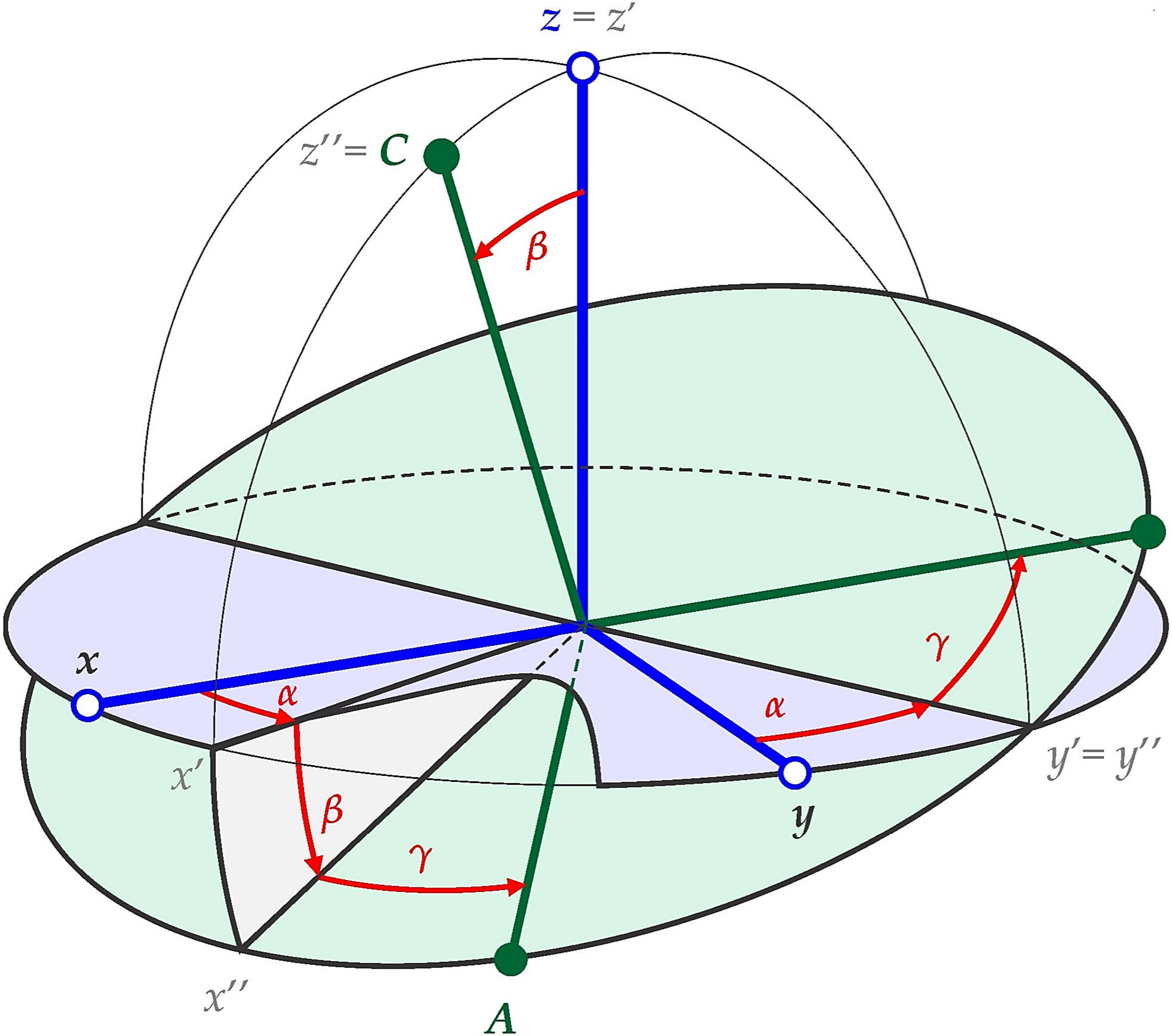
$$(x', y', z') \xrightarrow{R_{y'}(\beta)} (x'', y'', z'') \quad ;$$

c) Rotação $R_{z''}(\gamma)$ em ângulo γ com eixo $OZ'' = OZ'''$

$$(x'', y'', z'') \xrightarrow{R_{z''}(\gamma)} (x''', y''', z''')$$

Escrevemos então:

$$R(\alpha\beta\gamma) = R_{z''}(\gamma) R_{y'}(\beta) R_z(\alpha)$$



z = z′
z′′= C
β
B
x
α
α
γ
x′
β
γ
y′= y′′
y
x′′
A

É melhor transformar esta expressão para outra usando sempre o sistema de eixos fixos (x,y,z). Temos

$$R_{z''}(\gamma) = R_{y'}(\beta)\, R_z(\gamma)\, R_{y'}^{-1}(\beta)\,.$$

Assim temos:

$$\begin{aligned} R(\alpha,\beta,\gamma) &= R_{y'}(\beta)\, R_z(\gamma)\, \cancel{R_{y'}^{-1}(\beta)}\, \cancel{R_{y'}(\beta)}\, R_z(\alpha) \\ &= R_{y'}(\beta)\, R_z(\alpha)\, R_z(\gamma)\,, \end{aligned}$$

lembrando que rotações pelo mesmo eixo comutam. Também:

$$R_{y'}(\beta) = R_z(\alpha)\, R_y(\beta)\, R_z^{-1}(\alpha)\,,$$

de maneira que:

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = R_z(\alpha)\, R_y(\beta)\, R_z(\gamma)\,,$$

daqui o nome (ZYZ) para esta convenção. Representamos estas rotações por matrizes em $SU(2)$:

$$\begin{array}{l} R(\alpha\beta\gamma) = R_z(\alpha)\, R_y(\beta)\, R_z(\gamma) \\ \quad\updownarrow \quad e^{-i\frac{\alpha}{2}\sigma_z}\; e^{-i\frac{\beta}{2}\sigma_y}\; e^{-i\frac{\gamma}{2}\sigma_z} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & -\mathrm{sen}\frac{\beta}{2} \\ \mathrm{sen}\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\gamma}{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)} \cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i\frac{(\alpha-\beta)}{2}} \,\mathrm{sen}\frac{\beta}{2} \\ e^{i\frac{(\alpha-\beta)}{2}} \,\mathrm{sen}\frac{\beta}{2} & e^{i\frac{(\alpha+\gamma)}{2}} \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \mathbb{M}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix},$$

e obtemos os parâmetros de Cayley-Klein em função dos ângulos de Euler

$$\begin{cases} a = e^{-i\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)} \cos\frac{\beta}{2} \,, \\ b = -e^{-i\frac{(\alpha-\beta)}{2}} \,\mathrm{sen}\frac{\beta}{2} \,, \end{cases}$$

com

$$|a|^2 + |b|^2 = \cos^2\frac{\beta}{2} + \mathrm{sen}^2\frac{\beta}{2} = 1$$

§ REPRESENTAÇÃO dos OPERADORES de ROTAÇÃO

Todos os elementos de matriz de J_z e $J_\pm$ podem ser calculados nos espaços $\{|jm\rangle\}$. Como $(J_z, J_\pm)$ comutam com J^2, o número j é conservado, e temos espaços de representação de dimensão $(2j+1)$,

$$\text{com} \quad -j \leq m \leq j .$$

Os operadores de rotação podem ser representados nestes mesmos subespaços. Mostremos que os operadores de rotação também conservam o número $\underline{j}$. Seja então um ket rodado:

$$\mathcal{D}(R)|jm\rangle = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\varphi(\hat{n}\cdot\vec{J})\right\}|jm\rangle .$$

Temos:

$$J^2\left[\mathcal{D}(R)|jm\rangle\right] = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\varphi(\hat{n}\cdot\vec{J})\right\} J^2|jm\rangle ,$$

porque J^2 comuta com qualquer componente de $\vec{J}$, em particular com $(\hat{n}\cdot\vec{J}) = J_n$. Assim:

$$J^2\Big(\mathcal{D}(R)|jm\rangle\Big) = \hbar^2 j(j+1)\Big(\mathcal{D}(R)|jm\rangle\Big).$$

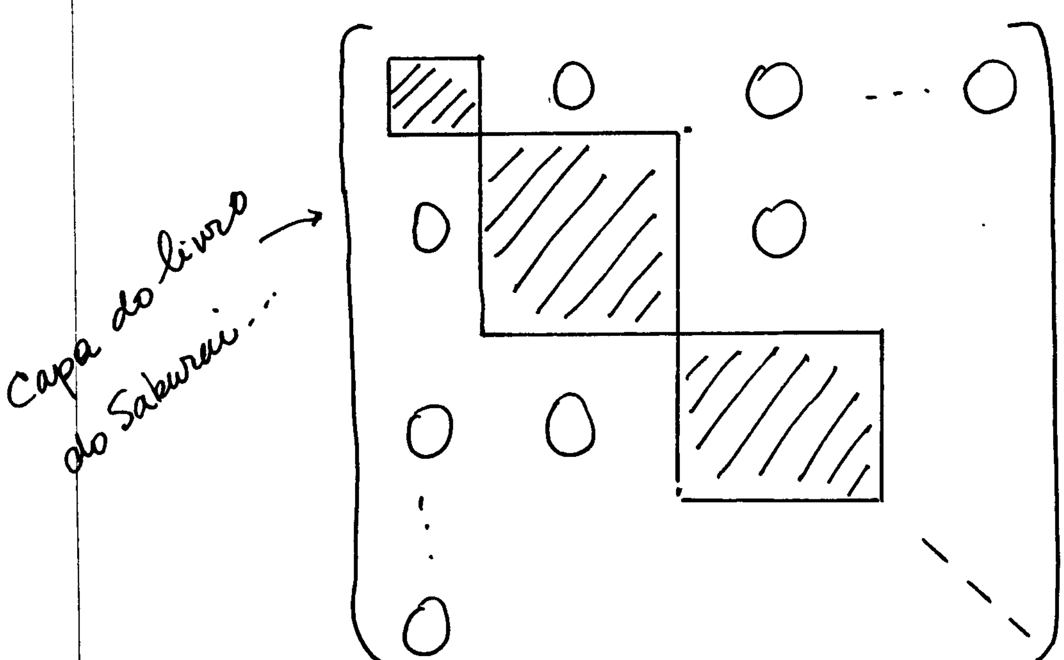
▶ Resultado: As rotações deixam invariante o número j.

Para $\underline{j}$ fixo, temos os elementos de matriz

II

$$\mathcal{D}^{(j)}_{m'm}(R) \equiv \langle j m' | \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\varphi J_n\right\} | j m \rangle .$$

Elementos de matriz com $j' \neq j$, são identicamente nulos. Estas matrizes $\mathcal{D}^{(j)}_{m'm}(R)$ de $(2j+1)\times(2j+1)$ são referidas na literatura como "Representações irredutíveis de dim $(2j+1)$ do Grupo de Rotações". Isto significa que a matriz de um operador de rotação $\mathcal{D}(R)$, não necessariamente caraterizada por um único valor de j, pode ser transformada em uma forma de blocos, com uma escolha adequada da base. Cada bloco se refere a um particular espaço com j fixo. Falamos que esta última representação é redutível:



Os espaços irredutíveis são invariantes. As propriedades das representações podem ser expressadas em termo de matrizes. Assim, para duas rotações (R_1, R_2), tais que:

$$R_3 = R_1 \cdot R_2$$

$$\mathcal{D}(R_3) = \mathcal{D}(R_1)\mathcal{D}(R_2) = \mathcal{D}(R_1 R_2)$$

$$\mathcal{D}^{(j)}_{m''m}(R_1 R_2) = \sum_{m'} \mathcal{D}^{(j)}_{m''m'}(R_1)\,\mathcal{D}^{(j)}_{m'm}(R_2)$$

Para uma representação unitária temos:

$$\mathcal{D}(R^{-1}) = \mathcal{D}^{-1}(R) = \mathcal{D}^{\dagger}(R)$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{D}^{(j)}_{m'm}(R^{-1}) = \mathcal{D}^{(j)*}_{mm'}(R).$$

As equações de transformação são:

$$\mathcal{D}(R)|jm\rangle = \sum_{m'} |jm'\rangle\langle jm'|\mathcal{D}(R)|jm\rangle$$

$$= \sum_{m'} |jm'\rangle\,\mathcal{D}^{(j)}_{m'm}(R),$$

porque os elementos de matriz de $\mathcal{D}(R)$ só ligam kets com o mesmo j. Uma parametrização conveniente é dada em termos dos ângulos de Euler (α, β, γ). Mostramos que uma rotação arbitrária $R(\alpha\beta\gamma)$ pode ser decomposta como:

$$R(\alpha\beta\gamma) = R_{z''}(\gamma)\, R_{y'}(\beta)\, R_z(\alpha)\,,$$
$$= R_z(\alpha)\, R_y(\beta)\, R_z(\gamma)\,,$$

onde a última representação é dada em termos dos eixos fixos. Usamos esta última para calcular os elementos de matriz:

$$\mathcal{D}(R(\alpha\beta\gamma)) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\alpha J_z\right)\cdot \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\beta J_y\right)\cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar}\gamma J_z\right),$$

e

$$\mathcal{D}^{(j)}_{m'm}(\alpha\beta\gamma) = \langle jm' |\, e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha J_z} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_y}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma J_z}\, | jm\rangle$$
$$= e^{-i\alpha m'}\, e^{-i\gamma m} \langle jm' |\, e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_y}\, | jm\rangle,$$

e o cálculo fica reduzido a calcular o elemento de matriz:

$$d^{(j)}_{m'm}(\beta) \equiv \langle jm' |\, e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_y}\, | jm\rangle\,,$$

com

$$\boxed{\mathcal{D}^{(j)}_{m'm}(\alpha\beta\gamma) = e^{-i(m'\alpha + m\gamma)}\, d^{(j)}_{m'm}(\beta)}$$

Problema: calcular os elementos de matriz $d^{(j)}_{m'm}(\beta)$ usando a representação de Schwinger.

$$\text{Escrevemos } \mathcal{D}(R) = \mathcal{D}(\alpha\beta\gamma)\Big|_{\alpha=\gamma=0} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\beta J_y\right)$$

$$\mathcal{D}(R)\,|jm\rangle = \frac{\mathcal{D}(R)\,(a_1^\dagger)^{j+m}\,(a_2^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!}}\,|0\rangle$$

$$\mathcal{D}(R)\big(\overbrace{a_1^\dagger \underbrace{\cdot}_{\mathcal{D}^{-1}\cdot\mathcal{D}} a_1^\dagger \underbrace{\cdot}_{\mathcal{D}^{-1}\cdot\mathcal{D}} \cdots \underbrace{\cdot}_{\mathcal{D}^{-1}\cdot\mathcal{D}} a_1^\dagger}^{j+m}\big) = \left[\mathcal{D}(R)\,a_1^\dagger\,\mathcal{D}^{-1}(R)\right]^{j+m}\mathcal{D}(R)$$

portanto, fazendo o mesmo processo para o produto $(a_2^\dagger)^{j-m}$:

$$\mathcal{D}(R)\,|jm\rangle = \frac{\left[\mathcal{D}(R)\,a_1^\dagger\,\mathcal{D}^{-1}(R)\right]^{j+m}\left[\mathcal{D}(R)\,a_2^\dagger\,\mathcal{D}^{-1}(R)\right]^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!}}\,\mathcal{D}(R)|0\rangle$$

Precisamos apenas transformar os operadores de criação:

$$\mathcal{D}(R)\,a_{1,2}^\dagger\,\mathcal{D}^{-1}(R) = e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_y}\cdot a_{1,2}^\dagger\cdot e^{\frac{i}{\hbar}\beta J_y}$$

Usamos a identidade de Baker-Hausdorff

$$e^{-i\lambda G}\,A\,e^{i\lambda G} = A - i\lambda\,[G,A] + \frac{(i\lambda)^2}{2!}\,[G,[G,A]] - \frac{(i\lambda)^3}{3!}\,[G,[G,[G,A]]] + \cdots$$

para $\lambda = \frac{\beta}{\hbar}$, $G = J_y$, $A = a^+_{1,2}$.

Calculamos o comutador:

$$[J_y, a^+_{1,2}] = \frac{i\hbar}{2}[a_2^+a_1 - a_1^+a_2, a^+_{1,2}]$$

Primeiro com a_1^+:

$$[J_y, a_1^+] = \frac{i\hbar}{2}[a_2^+a_1 - a_1^+a_2, a_1^+]$$

$$= \frac{i\hbar}{2} a_2^+[a_1, a_1^+] = \frac{i\hbar}{2} a_2^+ ,$$

$$[J_y, a_2^+] = \frac{i\hbar}{2}[a_2^+a_1 - a_1^+a_2, a_2^+]$$

$$= \frac{i\hbar}{2}\left(-a_1^+[a_2, a_2^+]\right) = -\frac{i\hbar}{2} a_1^+$$

Outros comutadores de ordem maior:

$$[G,[G,A]] = [J_y, [J_y, a_1^+]] = \frac{i\hbar}{2}[J_y, a_2^+]$$

$$= \left(\frac{i\hbar}{2}\right)\left(\frac{-i\hbar}{2}\right) a_1^+ = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 a_1^+$$

$$[G,[G,[G,A]]] = [J_y, (\tfrac{\hbar}{2})^2 a_1^+] = (\tfrac{\hbar}{2})^2(\tfrac{i\hbar}{2}) a_2^+$$

Obtemos a série:

$$\mathcal{D}(R)\, a_1^{+}\, \mathcal{D}^{-1}(R) = a_1^{+} - i\frac{\beta}{\hbar}\left(\frac{i\hbar}{2}\right) a_2^{+} + \left(\frac{i\beta}{\hbar}\right)^2 \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 a_1^{+} -$$

$$- \frac{1}{3!}\left(\frac{i\beta}{\hbar}\right)^3 \frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 a_2^{+} \cdots$$

$$= a_1^{+}\left(1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \cdots\right) + a_2\left(\frac{\beta}{2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\beta}{2}\right)^3 + \cdots\right),$$

ou

$$\boxed{\mathcal{D}(R)\, a_1^{+}\, \mathcal{D}^{-1}(R) = a_1^{+} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + a_2^{+} \operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)}\,.$$

Analogamente, para a_2^{+} temos:

$$\mathcal{D}(R)\, a_2^{+}\, \mathcal{D}^{-1}(R) = - a_1^{+} \operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) + a_2^{+} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right),$$

o que pode ser escrito em forma compacta como

$$\mathcal{D}(R)\begin{pmatrix} a_1^{+} \\ a_2^{+} \end{pmatrix}\mathcal{D}^{-1}(R) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & \operatorname{sen}\frac{\beta}{2} \\ -\operatorname{sen}\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1^{+} \\ a_2^{+} \end{pmatrix}$$

Esta fórmula é bastante sugestiva, lembrando que os estados básicos de spin são:

$$|+\rangle = a_1^{+}|0\rangle, \qquad |-\rangle = a_2^{+}|0\rangle$$

e que eles transformam por rotação como:

$$|+\rangle = a_1^+|0\rangle \longrightarrow \mathcal{D}(R)|+\rangle = \cos\frac{\beta}{2}\,|+\rangle + \operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\,|-\rangle$$

$$= \left(a_1^+\cos\frac{\beta}{2} + a_2^+\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\right)|0\rangle\,,$$

e

$$|-\rangle = a_2^+|0\rangle \longrightarrow \mathcal{D}(R)|-\rangle = -\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\,|+\rangle + \cos\frac{\beta}{2}\,|-\rangle$$

$$= \left(-\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\,a_1^+ + \cos\frac{\beta}{2}\,a_2^+\right)|0\rangle$$

Na fórmula da transformação temos:

$$\left[\mathcal{D}(R)a_1^+\mathcal{D}^{-1}(R)\right]^{j+m} = \left[a_1^+\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + a_2^+\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]^{j+m}$$

e usando a fórmula binomial, notando que $[a_1^+, a_2^+] = 0$

$$= \sum_k \binom{j+m}{k}\left[a_1^+\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]^{j+m-k}\left[a_2^+\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]^k$$

$$= \sum_k \frac{(j+m)!}{(j+m-k)!\,k!}\left(a_1^+\cos\frac{\beta}{2}\right)^{j+m-k}\left(a_2^+\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\right)^k$$

e para a transformação completa:

$$\mathcal{D}(R)\Big|_{\alpha=\gamma=0}|jm\rangle = \sum_{m'}|jm'\rangle\, d^{(j)}_{m'm}(\beta)$$

$$= \sum_k \sum_\ell \frac{\sqrt{(j+m)!}}{k!\,(j+m-k)!} \frac{\sqrt{(j-m)!}}{\ell!\,(j-m-\ell)!} \left(a_1^\dagger \cos\frac{\beta}{2}\right)^{j+m-k} \times$$

$$\times \left(a_2^\dagger \operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\right)^{k} \left(-a_1^\dagger \operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\right)^{j-m-\ell} \left(a_2^\dagger \cos\frac{\beta}{2}\right)^{\ell} \mathcal{D}|0\rangle$$

$$= \sum_k \sum_\ell \frac{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!}}{k!\,\ell!\,(j+m-k)!\,(j-m-\ell)!} (-1)^{j-m-\ell} \cos\frac{\beta}{2}^{j+m-k+\ell}$$

$$\times \operatorname{sen}\frac{\beta}{2}^{j-m-\ell+k} \left(a_1^\dagger\right)^{j+\cancel{m}-k+j-\cancel{m}-\ell} \left(a_2^\dagger\right)^{k+\ell} \mathcal{D}|0\rangle$$

Notamos que o vácuo é invariante por rotações:

$$\mathcal{D}(R)|0\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\beta J_y\right)|0\rangle$$

$$= \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\beta\,\frac{i\hbar}{2}(a_2^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_2)\right]|0\rangle = \exp\left[\frac{\beta}{2}(a_2^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_2)\right]|0\rangle$$

$$= \left\{1 - \frac{\beta}{2}(a_2^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_2) + \cdots \right\}|0\rangle = |0\rangle,$$

Daí:

$$\mathcal{D}(R)\Big|_{\alpha=\gamma=0} |jm\rangle = \sum_{m'} |jm'\rangle\, d^{(j)}_{m'm}(\beta)$$

$$= \sum_{m'} d^{(j)}_{m'm}(\beta) \frac{(a_1^\dagger)^{j+m'} (a_2^\dagger)^{j-m'}}{\sqrt{(j+m')!\,(j-m')!}} |0\rangle$$

$$= \sum_k \sum_\ell \frac{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!}}{k!\,\ell!\,(j+m-k)!\,(j-m-\ell)!} (-1)^{j-m-\ell} \cos^{j+m-k+\ell}\frac{\beta}{2}$$

$$\operatorname{sen}^{j-m-\ell+k}\frac{\beta}{2} \quad (a_1^+)^{2j-k-\ell} \quad (a_2^+)^{k+\ell} \quad |0\rangle$$

$$= \sum_k \sum_\ell \frac{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!\,(2j-k-\ell)!\,(k+\ell)!}}{k!\,\ell!\,(j+m-k)!\,(j-m-\ell)!} (-1)^{j-m-\ell}$$

$$\cos^{j+m-k+\ell}\frac{\beta}{2} \operatorname{sen}^{j-m-\ell+k}\frac{\beta}{2} \frac{(a_1^+)^{2j-k-\ell}\,(a_2^+)^{k+\ell}}{\sqrt{(2j-k-\ell)!\,(k+\ell)!}} |0\rangle$$

Para identificar os elementos de matriz, eliminamos um índice mediante a transformação

$$\left.\begin{aligned} 2j-k-\ell &= j+m' \\ k+\ell &= j-m' \end{aligned}\right\} \quad m' = j-k-\ell$$

$$j-m-\ell = j-m-(j-k-m') = k+m'-m \qquad \text{ou} \quad \ell = j-k-m'$$

$$= \sum_{m'} \sum_k \frac{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!\,(j+m')!\,(j-m')!}}{k!\,(j-k-m')!\,(j+m-k)!\,(k+m'-m)!} (-1)^{k+m'-m}$$

$$\cos^{j+m-k+(j-k-m')}\frac{\beta}{2} \operatorname{sen}^{2k+m'-m}\frac{\beta}{2} \quad \frac{(a_1^+)^{j+m'}\,(a_2^+)^{j-m'}}{\sqrt{(j+m')!\,(j-m')!}} |0\rangle$$

A variação de $\underline{k}$ é sobre um intervalo onde o argumento das fatoriais são <u>não</u> negativos

$$= \sum_{m'} |jm'\rangle \sum_{k} (-1)^{k+m'-m} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{k!(j-k-m')!(j+m-k)!(k+m'-m)!}$$

$$\cos^{2j-2k+m-m'} \frac{\beta}{2} \quad \operatorname{sen}^{m'-m+2k}\left(\frac{\beta}{2}\right),$$

de onde obtemos a <u>fórmula de Wigner</u>:

$$d^{(j)}_{m'm}(\beta) = \sum_{k} (-1)^{k+m'-m} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{k!(j-k-m')!(j+m-k)!(k+m'-m)!}$$

$$\cos^{2j-2k+m-m'} \frac{\beta}{2} \quad \operatorname{sen}^{m'-m+2k}\left(\frac{\beta}{2}\right),$$

e para não se preocupar com o intervalo de variação do índice k, a fórmula pode ser escrita em termos da função $\Gamma(z)$, com $\Gamma(n) = (n-1)!$. $\Gamma(z)$ tem um polo em $z=0$. Também para $z=-1,-2,-3,\ldots$ Assim estes termos são cancelados automáticamente da fórmula acima:

$$d^{(j)}_{m'm}(\beta) = \sum_{\text{Todo } k} (-1)^{k+m'-m} \frac{\sqrt{\Gamma(j+m+1)\,\Gamma(j-m+1)\,\Gamma(j+m'+1)\,\Gamma(j-m'+1)}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(j-k-m'+1)\,\Gamma(j+m-k+1)\,\Gamma(k+m'-m+1)}$$

$$\times \cos^{2j-2k+m-m'} \beta/2 \quad \operatorname{sen}^{2k+m'-m}(\beta/2)$$

Exemplo: $j=1$, dim 3. Calculemos elementos diagonais e Traço de $d^{(j)}_{m'm}(\beta)$. Quando $m'=m$, a nossa fórmula pode ser transformada para

$$d^{(j)}_{mm}(\beta) = (j+m)!(j-m)! \sum_k (-1)^k \left[\Gamma(k+1)\Gamma(j-m-k+1)\Gamma(j+m-k+1)\,\Gamma(k+1)\right]^{-1}$$

$$\times \cos^{2(j-k)}\frac{\beta}{2}\ \text{sen}^{2k}\frac{\beta}{2}$$

a) $m=1$, $j=1$

$k+1>0$, $1-k>0$, $3-k>0$

$k>-1$, $k<1$ $\Rightarrow$ $k=0$, única possibilidade

$$d^{(1)}_{11}(\beta) = \cos^2\frac{\beta}{2}$$

b) $m=0$, $j=1$

$k+1>0$, $2-k>0$ $\Rightarrow$ $k>-1$, $k<2 \Rightarrow k=0,1$

$$d^{(1)}_{00}(\beta) = 1!\,1!\left(\cos^2\frac{\beta}{2} - \text{sen}^2\frac{\beta}{2}\right) = 2\cos^2\frac{\beta}{2} - 1$$

c) $m=-1$, $j=1$

$k+1>0$, $1-k>0$, $\cancel{3}-k>0 \Rightarrow k>-1$, $k<1$

$k=0$

$$d^{(1)}_{\bar{1}\bar{1}}(\beta) = \cos^2\beta/2$$

$$\mathrm{Tr}\, \mathcal{D}^{(1)}(R)\Big|_{\alpha=\gamma=0} = \sum_{m=1,0,-1} d^{(1)}_{mm}(\beta)$$

$$= 4\cos^2\frac{\beta}{2} - 1 = 4\,\frac{\cos\beta+1}{2} - 1$$

$$= 2\cos\beta + 1 \quad , \quad \text{como deve ser !}$$

Lembrando que a forma canônica de uma rotação com β com eixo $\underline{y}$ tem forma:

$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \operatorname{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} ,$$

com $\mathrm{Tr}\, R_y(\beta) = 2\cos\beta + 1$